

## الإشتقاق

### قابلية اشتقاق دالة في نقطة – تأويلات هندسية

$(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته: $y = f'(a).(x - a) + f(a)$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'(a)$	$\Leftrightarrow$	$f$ قابلة للاشتقاق في $a$
$(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'_d(a)$ و معادلته: $y = f'_d(a).(x - a) + f(a)$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'_d(a)$	$\Leftrightarrow$	$f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين
$(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'_g(a)$ و معادلته: $y = f'_g(a).(x - a) + f(a)$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'_g(a)$	$\Leftrightarrow$	$f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار
$(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته: $y = f'(a).(x - a) + f(a)$	$\Leftrightarrow$	$f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين ✓ $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار ✓ $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$ ✓	$\Leftrightarrow$	$f$ قابلة للاشتقاق في $a$

- إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في  $a$  على اليمين و  $f$  قابلة للاشتقاق في  $a$  على اليسار و  $f'_d(a) \neq f'_g(a)$  فإن  $f$  غير قابلة للاشتقاق في  $a$ . في هذه الحالة  $(C_f)$  يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة  $A(a, f(a))$  معاملاهما الموجهان  $f'_d(a)$  و  $f'_g(a)$  و النقطة  $A(a, f(a))$  تسمى نقطة مزواة

- إذا كانت  $f'(a) = 0$  فإن  $(C_f)$  يقبل مماس أفقي في  $A(a, f(a))$

$f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	$f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$
$(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a, f(a))$	$(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a, f(a))$

$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ <p>على اليسار</p> <p><math>(C_f)</math> يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة <math>A(a, f(a))</math></p>	$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ <p>على اليمين</p> <p><math>(C_f)</math> يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة <math>A(a, f(a))</math></p>
---	---

### الدالة المشتقة لدالة عديدة

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال مفتوح  $I$ .  
نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$ ، إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في كل نقطة من  $I$ .

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $[a, b]$ .  
نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[a, b]$ ، إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح  $]a, b[$  و قابلة للاشتقاق على اليمين في  $a$  و قابلة للاشتقاق على اليسار في  $b$ .

لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ .  
الدالة المشتقة للدالة  $f$  هي الدالة التي نرمز بالرمز  $f'$  و المعرفة كما يلي:  
$$f': I \rightarrow \mathbb{R}$$
  
$$x \mapsto f'(x)$$

الدالة المشتقة	الدالة
$\alpha f'$	$\alpha f$
$f' + g'$	$f + g$
$f' \times g + f \times g'$	$f \times g$
$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{1}{g}$
$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$
$f' \times g' \circ f$	$g \circ f$
$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}$
$nf' f^{n-1}$	$f^n$

المجال $I$	الدالة المشتقة $f'$	الدالة $f$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$

$I = ]-\infty, 0[$ أو $I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$
$I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$
$I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$I = ]-\infty, 0[$ أو $I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$

- كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها .

- ✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$  فإن  $f$  تزايدية على  $I$
- ✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$  فإن  $f$  تناقصية على  $I$
- ✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$  فإن  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$
- ✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$  فإن  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$

- ✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$  وكانت  $f'$  تنعدم في عدد منته من النقط على  $I$  فإن  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$
- ✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$  وكانت  $f'$  تنعدم في عدد منته من النقط على  $I$  فإن  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$

### الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية

لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  .  
 إذا كانت الدالة المشتقة  $f'$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  فإن دالتها المشتقة على  $I$  تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة  $f$  ، ونرمز لها بالرمز  $f''$  .  
 إذا كانت  $f''$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  فإن دالتها المشتقة على  $I$  تسمى الدالة المشتقة الثالثة ( أو الدالة المشتقة من الرتبة 3 ) ،  
 و يرمز لها ب  $f'''$  أو  $f^{(3)}$  .

### المعادلة التفاضلية : $y'' + \omega^2 y = 0$

ليكن  $\omega$  عددا حقيقيا غير منعدم.

- المعادلة  $y'' + \omega^2 y = 0$  ذات المجهول  $y$  حيث  $y''$  مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية.
- كل دالة  $f$  قابلة للاشتقاق مرتين على  $\mathbb{R}$  و تحقق المتساوية  $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  تسمى حلا للمعادلة التفاضلية  $y'' + \omega^2 y = 0$ .

ليكن  $\omega$  عددا حقيقيا غير منعدم.

الحل العام للمعادلة التفاضلية  $y'' + \omega^2 y = 0$  هو مجموعة الدوال  $y$  المعرفة كما يلي :  $y : x \mapsto \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}$  و  $\beta \in \mathbb{R}$

حالة خاصة :

إذا كان  $\omega = 0$  : حل المعادلة التفاضلية  $y'' = 0$  هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $y : x \mapsto ax + b$  حيث  $a \in \mathbb{R}$  و  $b \in \mathbb{R}$